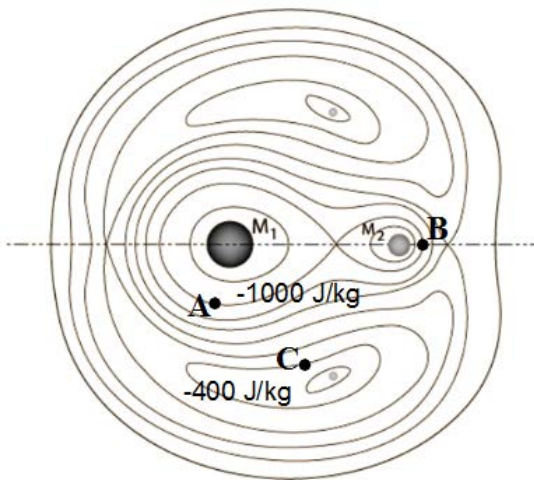


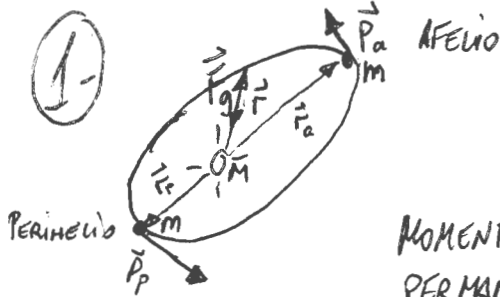
Nombre:

Apellidos:

1. La órbita de Plutón en torno al Sol es notablemente excéntrica. La relación de entre las distancias del afelio y perihelio al Sol es $R_a/R_p = 5/3$. Razona cuál será la relación entre los valores en el afelio y en el perihelio de las siguientes magnitudes de Plutón: **(3p)**
- Momento angular respecto al centro del Sol.
 - Cantidad de movimiento.
 - Energía mecánica.



2. El diagrama de la izquierda corresponde a las superficies equipotenciales de un sistema formado por las masas M_1 y M_2 . Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones: **(3p)**
- ¿Existe algún punto en el que se anule la intensidad de campo gravitatorio? ¿Y el potencial gravitatorio? Representa las líneas de campo sobre el gráfico.
 - ¿Cuál es el trabajo realizado sobre una masa de 100 kg para ir desde A hasta B? ¿Cuál es el incremento de energía cinética cuando la masa de 100 kg va desde C hasta A? ¿Qué deduces del signo de dicho incremento?
 - ¿Qué masa habría que desplazar desde A hasta el infinito para que el trabajo realizado sobre dicha masa coincidiese con el realizado sobre la masa de 100 kg para llevarla desde C hasta el infinito?
3. Dos satélites gemelos describen órbitas circulares alrededor de un planeta cuyo radio es de 3000 km. El primero de ellos orbita a 1000 km de la superficie del planeta y su periodo orbital es de 2 h. La órbita del segundo tiene un radio 500 km mayor que la del primero. Calcula: **(4p)**
- El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.
 - El periodo orbital del segundo satélite.
 - La relación entre sus energías mecánicas. Razona cuál de ellos tiene mayor energía.
 - La relación entre sus velocidades de escape.



a) AL TRATARSE DE UN MOVIMIENTO SOMETIDO A UNA FUERZA CENTRAL ($\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{u}_r$); EL MOMENTO ANGULAR DE PLUTÓN RESPECTO AL SOL ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$) PERMANECE CONSTANTE:

$$\frac{R_A}{R_P} = \frac{5}{3}$$

MOMENTO DE LA FUERZA GRAVITATORIA: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ PQ $\vec{F} \parallel \vec{r}$.

CONFORME AL TA DEL MOMENTO CINÉTICO:

EL CAMBIO DE MOM. CINÉTICO CAUSA UN MOM. DE FUERZA.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\alpha = 90^\circ$ (v // p)

Así PUES, $\vec{L} = cte$ PQ. $\vec{0} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

2ª LEY DE NEWTON si $m = cte$

$$\vec{L}_A = \vec{L}_P \Rightarrow \frac{L_A}{L_P} = 1$$

b) LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ($\vec{p} = m\vec{v}$) SE PUEDE RELACIONAR A PARTIR DEL APARTADO ANTERIOR:

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} \rightarrow |\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin(\alpha) \quad \text{EN EL AFELIO Y PERIHELIO } \alpha = 90^\circ$$

$$L = r \cdot p$$

Como $\frac{L_A}{L_P} = 1$ y $\frac{R_A}{R_P} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{p_A}{p_P} = \frac{L_A/R_A}{L_P/R_P} = \frac{R_P}{R_A} = \frac{3}{5}$

c) PLUTÓN ESTÁ SOMETIDO A UN CAMPO CONSERVATIVO, CAUSADO POR LA GRAVEDAD DEL SOL:

$$\frac{E_{m_A}}{E_{m_P}} = 1$$

PQ CAMPO CONSERVATIVO



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\frac{GMm}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{r} = \left[-\frac{GMm}{r} \right]_A^B = -\Delta E_p$$

EL TRABAJO PARA IR DE UN PUNTO A OTRO REALIZADO POR LAS FZAS. DEL CAMPO NO DEPENDE DEL CAMINO QUE SIGA

DEF. DE ENERGÍA POTENCIAL

$$W_{AA} = \oint_A^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{p_A} - E_{p_A} = 0 \quad \text{EL TRABAJO SOBRE UNA TRAYECTORIA CERRADA ES CERO}$$

+ TEOREMA FUERZAS VIVAS ($W_R = \Delta E_c$)

Si SÓLO ACTÚAN LAS FUERZAS DE CAMPO CONSERVATIVO, LA ENERGÍA MECÁNICA SE CONSERVA.

$$\vec{W}_R = W_{F_g} \Rightarrow$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

$$\Delta E_m = 0$$

2-

a)

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \hat{u}_r$$

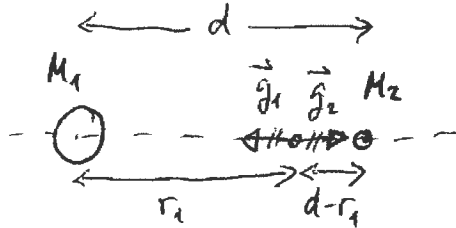
SEGÚN EL TA DE SUPERPOSICIÓN DE CAMPOS:

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

EL CAMPO TOTAL SE PUEDE ANULAR

$$\text{Si } \vec{g}_1 = -\vec{g}_2 \begin{cases} \bullet \text{ MISMA DIR} \\ \bullet \text{ SENT. CONT.} \\ \bullet \text{ IGUAL MOD.} \end{cases}$$

VER DIBUJOS



$$g_1 = g_2 \Rightarrow \frac{GM_1}{r_1^2} = \frac{GM_2}{(d-r_1)^2}$$

$$M_1(d-r_1)^2 = M_2 r_1^2$$

EL CAMPO GRAVITATORIO SE ANULARÁ EN UNA POSICIÓN SITUADA ENTRE LOS CENTROS DE AMBAS MASAS, PERO MÁS CERCA DE M2 QUE DE M1; YA QUE M2 < M1. NO OCURRIRÁ LO MISMO CON EL POTEN.

$$\frac{W_{AB}}{m} = \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{r} = -\frac{GM}{r_A} - \left(-\frac{GM}{r_B}\right) \Rightarrow \boxed{V = -\frac{GM}{r}} \quad \begin{cases} V_T = V_1 + V_2 < 0 \\ \text{ES NEGATIVO EN CUALQUIER PUNTO (SALVO SI } r \rightarrow \infty) \end{cases}$$

b) $W_{AB} = m(V_A - V_B) = \underline{0 \text{ J}}$ A, B ESTÁN SOBRE UNA SUPERF. EQUIPOTENCIAL

$$V_A = V_B = -1000 \text{ J/kg}$$

$$W_{CA} = m(V_C - V_A) = 100 \cdot (-400 - (-1000)) = 6 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$m = 100 \text{ kg}$$

$$V_A = -1000 \text{ J/kg}$$

$$V_C = -400 \text{ J/kg}$$

SEGÚN EL TA DE CONS. DE Em

$$\Rightarrow W_{CA} = \Delta E_c = 6 \cdot 10^4 \text{ J} > 0$$

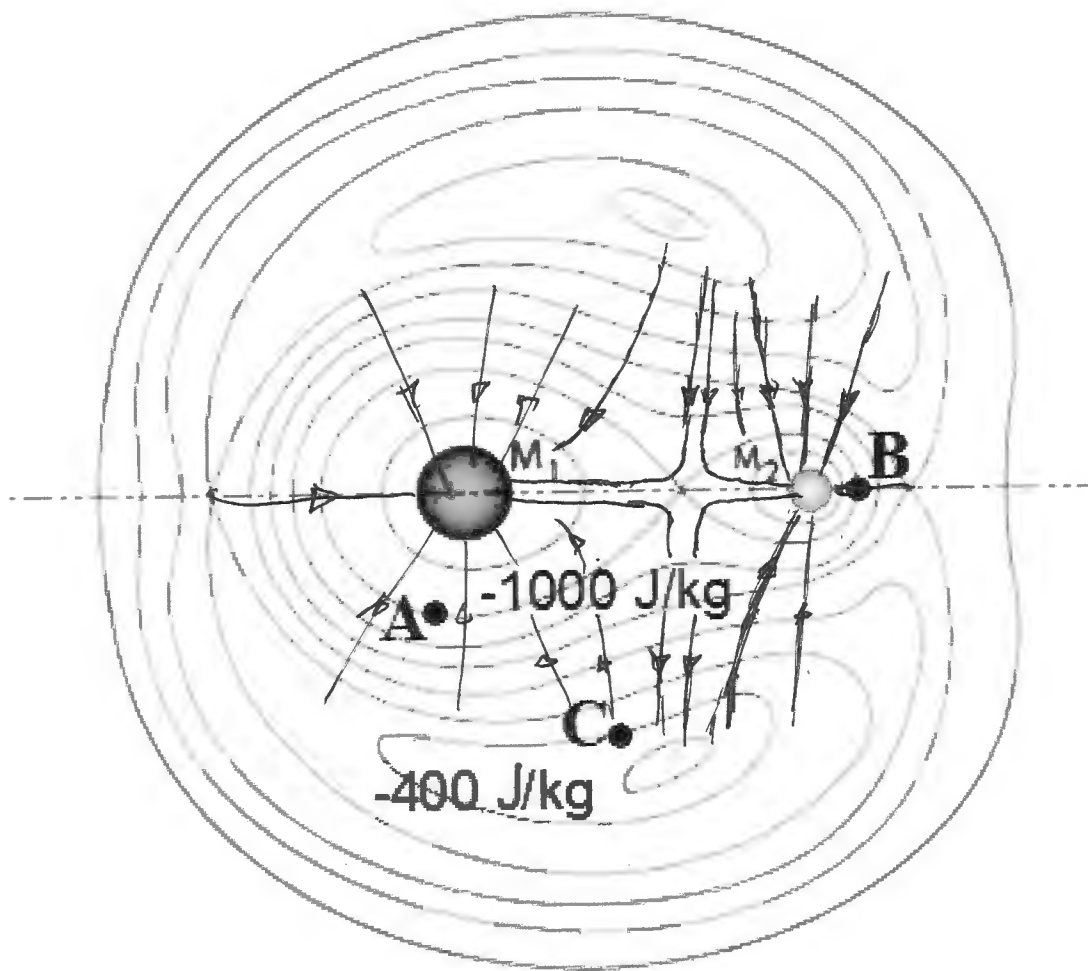
EL TRABAJO LO REALIZA EL CAMPO Y SE INVIERTE EN AUMENT. LA Ec DE LA MASA.

c) $W_{A\infty} = m(V_A - V_\infty) = -10^3 \text{ m J}$

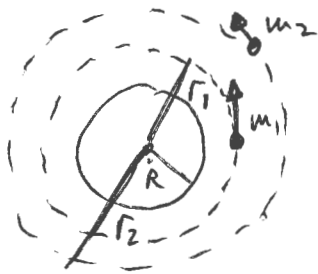
$$W_{C\infty} = 100 \cdot (V_C - V_\infty) = -4 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\text{Si } W_{A\infty} = W_{C\infty}$$

$$\Rightarrow m = \frac{4 \cdot 10^4}{10^3} = \underline{40 \text{ kg}}$$



3-



a) LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD SE DEFINE:

$$\boxed{\vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \hat{u}_r} \rightarrow g_0 = \frac{GM}{R^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{MÓDULO DE } \vec{g} \\ \text{HACE LA SUPERFICIE} \end{array} \right)$$

DATOS:

$$r_1 = R + \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}R$$

$$T_1 = 2h = 7200$$

$$r_2 = R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R$$

$$m_1 = m_2 \quad (\text{SATÉLITES GEMELOS})$$

LA TERCERA LEY DE KEPLER:

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot r^3} \Rightarrow GM = \frac{4\pi^2}{T^2} r^3$$

COMBINANDO AMBAS EXPRESIONES: (PARA EL SATÉLITE 1)

$$g = \frac{4\pi^2 \frac{4^3 R^3}{3^3}}{R^2 \cdot T^2} = \frac{4\pi^2}{33} \cdot \frac{R}{T^2} = \frac{4\pi^2}{3^3 \cdot 7200^2} = 5,41 \text{ m/s}^2$$

b) UTILIZANDO DE NUEVO LA 3ª LEY DE KEPLER:

$$\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 = \frac{\frac{4\pi^2}{GM}}{\frac{4\pi^2}{GM}} \cdot \left(\frac{\frac{4}{3}R}{\frac{3}{2}R} \right)^3 = \left(\frac{9}{8} \right)^3 \Rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{9^3}{8^3}} \cdot T_1 = 2,39 \text{ h}$$

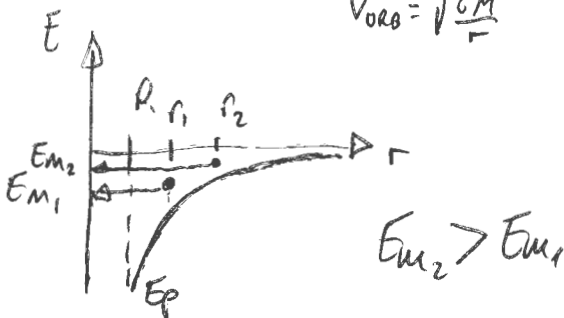
c) LA ENERGÍA MECÁNICA EN UNA ÓRBITA CIRCULAR:



$$F_c = F_g \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_{\text{orb}}^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m \left(\sqrt{\frac{GM}{r}} \right)^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r}}$$



$$\left[\frac{E_{m1}}{E_{m2}} = \frac{-\frac{1}{2} \frac{GMm}{\frac{4}{3}R}}{-\frac{1}{2} \frac{GMm}{\frac{3}{2}R}} = \frac{9}{8} = 1,125 \right]$$

¡OJO AL COMPARAR 2 NÚMEROS NEGATIVOS!

d) LA VELOCIDAD DE ESCAPE DE UN SATÉLITE EN SU ÓRBITA:

$$E_m + E_{\text{esc}} = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r} + \frac{1}{2} m v_{\text{esc}}^2 = 0 \Rightarrow v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\frac{v_{\text{esc1}}}{v_{\text{esc2}}} = \sqrt{\frac{GM/\frac{4}{3}R}{GM/\frac{3}{2}R}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = 1,061$$