EXAMEN DE RECUPERACIÓN DE FÍSICA **2º BACHILLERATO**

1ª EVALUACIÓN

Nombre:
Apellidos:

CUESTIONES

1. Dibuja en un diagrama las líneas de campo gravitatorio y las superficies equipotenciales creadas por una masa puntual M. Sean los puntos A, B y C; tales que A y C se encuentran en la misma superficie equipotencial, y B se encuentra en la misma línea de campo que A pero más próximo a M. Determina de forma razonada:
   a) Si una masa, m, está situada en reposo en el punto A y se traslada a B, ¿su energía potencial, aumenta o disminuye? ¿Y su energía cinética?
   b) Si una masa, m´, está situada en reposo en el punto C y se traslada a A pasando por B, ¿su energía potencial, aumenta o disminuye? ¿Y su energía cinética?

2.
   a) Enuncia y demuestra el Teorema de conservación del momento angular.
   b) ¿Qué relación tiene este Teorema con las Leyes de Kepler?

3.
   a) Se lanza verticalmente un objeto desde la superficie de la Luna, con velocidad inicial igual a la de escape desde la superficie lunar. ¿A qué distancia del centro de la Luna su velocidad se reduce a la mitad de la inicial?
   b) Se lanza verticalmente un objeto desde la superficie de la Luna, con velocidad inicial igual a la mitad de la de escape desde la superficie lunar. ¿A qué altura máxima sobre la superficie de la Luna llega?

PROBLEMAS

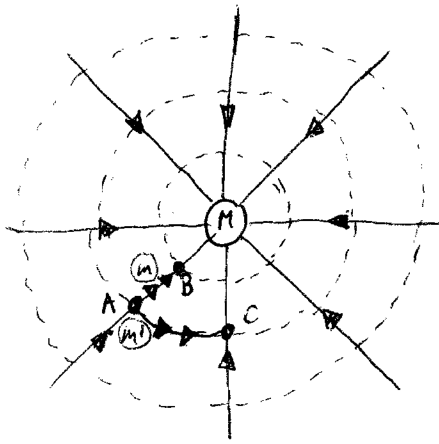
4. La sonda espacial europea Mars Express orbita en torno a Marte recorriendo una órbita completa cada 7,5 horas, siendo su masa de 120 kg:
   a) Si suponemos que su órbita es circular, su velocidad orbital es de 2,15 km/s. Determina la masa de Marte.
   b) En realidad, esta sonda describe una órbita elíptica de forma que puede aproximarse lo suficiente al planeta como para fotografiar su superficie con nitidez. La distancia a la superficie marciana en el punto más próximo es de 258 km y de 11560 km en el punto más alejado. Obtén la relación entre las velocidades de las sondas en esos dos puntos.

   Datos: Constante de gravitación universal, $G= 6,67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$.
   Radio de Marte, $R_M= 3390$ km.

5. En un sistema estelar binario, una estrella, situada en el origen de coordenadas, tiene masa $m_1 = 2\cdot10^{30}$ kg, y la otra, $m_2 = 3\cdot10^{30}$ kg, y se encuentra sobre el eje X en la posición $(3\cdot10^6, 0)$ km. Calcula:
   a) El punto en el que se anula el campo gravitatorio del sistema.
   b) El trabajo necesario para llevar un satélite de 500 kg desde el punto solución del apartado a) hasta que escape del campo gravitatorio del sistema.

   Dato: Constante de gravitación universal, $G= 6,67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$.

1-



LEYENDA DEL GRÁFICO:

- LÍNEAS CONTINUAS CON DIRECCIÓN → $\boxed{\text{LÍNEAS DE CAMPO}}$
- LÍNEAS DISCONTINUAS: $\boxed{\text{SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES}}$
- LÍNEAS DE DOBLE FLECHA: $\boxed{\text{TRAYECTORIAS DE MÓVILES}}$

a)

- AL TRASLADARSE LA PARTÍCULA m DE A a B, ESTÁ PARTIENDO DE UNA POSICIÓN CON MAYOR POTENCIAL QUE LA POSICIÓN DE LLEGADA, YA QUE EL POTENCIAL GRAVITATORIO SE DEFINE: $\boxed{V = -\frac{GM}{r}}$

COMO $r_A > r_B \Rightarrow V_A > V_B$

- EL TRABAJO REALIZADO POR LAS FUERZAS DEL CAMPO GRAVITATORIO, QUE ES CONSERVATIVO, PARA DESPLAZAR A LA PARTÍCULA m DE A a B:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\frac{GMm}{r^2}\hat{u}_r \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = \boxed{-m\Delta V}$$

$$\boxed{E_p = -\frac{GMm}{r}}$$

$\Delta V = V_B - V_A < 0$

$\boxed{\text{EL TRABAJO ES REALIZADO POR EL CAMPO}}$ $W_{AB} > 0 \rightarrow \boxed{E_{P_A} > E_{P_B}}$ ⇐ LA ENERGÍA POTENCIAL TIENE SU ORIGEN EN EL INFINITO.

$\boxed{\Delta E_p < 0} \Rightarrow$ $\boxed{\text{LA ENERGÍA POTENCIAL DISMINUYE AL IR DE A a B}}$

- AL TRATARSE DE UN CAMPO CONSERVATIVO, Y SÓLO ACTUAR LAS FUERZAS DEL CAMPO, LA ENERGÍA MECÁNICA PERMANECE CONSTANTE.

$$\boxed{\Delta E_m = 0} \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p > 0$$

b)

- AL TRATARSE DE UN CAMPO CONSERVATIVO, EL TRABAJO NO DEPENDE DEL CAMINO SEGUIDO, TAN SÓLO DEL INCREMENTO DE ENERGÍA POTENCIAL:

$$W_{CA} = \int_C^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p$$

- COMO A y C ESTÁN EN LA MISMA SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL:

LA ENERGÍA POTENCIAL PERMANECE CONSTANTE $\boxed{E_{P_A} = E_{P_C}} \Rightarrow \boxed{\Delta E_p = E_{P_A} - E_{P_C} = 0}$

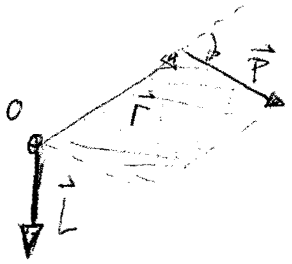
- SEGÚN LO VISTO EN EL APARTADO a): $\Delta E_m = 0 \Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p$

LA ENERGÍA CINÉTICA TAMPOCO SE INCREMENTA $\boxed{\Delta E_c = 0}$

(2-)

a) EL MOMENTO ANGULAR ~~DE UN PARTÍCULA~~ SOBRE UN PUNTO ES IGUAL AL PRODUCTO VECTORIAL DEL VECTOR DE POSICIÓN DE DICHA PARTÍCULA RESPECTO AL PUNTO POR ~~LA~~ CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE LA PARTÍCULA.

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$



<u>TEOREMA DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR</u>: EN AUSENCIA DE MOMENTOS DE FUERZA EXTERNOS, NETOS, EL MOMENTO ANGULAR, DEL SISTEMA SE CONSERVA.

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}^{*}$$

TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO (DEMO):

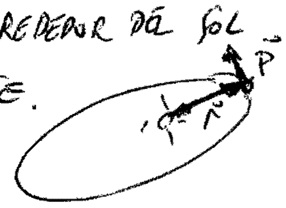
O (pq $\vec{v} \parallel \vec{p}$)

$$\frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \cancel{\vec{v}\times\vec{p}} + \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u>: Si $\vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{cte}}$

b) ESTÁ ÍNTIMAMENTE RELACIONADO CON LA 1ª Y 2ª LEYES DE KEPLER.

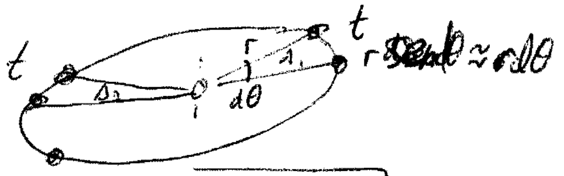
<u>1ª LEY</u>: LOS PLANETAS DESCRIBEN ÓRBITAS ELÍPTICAS ALREDEDOR DEL SOL ESTANDO ÉSTE SITUADO EN UNO DE LOS FOCOS DE LA ELIPSE.



RELACIONADA CON LA CONSTANCIA DE LA DIRECCIÓN DE $\vec{L}$ $\Rightarrow \vec{L} = \vec{cte} \Rightarrow \vec{r}$ y $\vec{p}$ ESTÁN INSCRITOS EN EL MISMO PLANO

<u>2ª LEY</u>: EL ÁREA BARRIDA POR EL VECTOR DE POSICIÓN DEL PLANETA ES IGUAL EN TIEMPOS IGUALES.

DEMO:

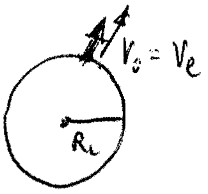


RELACIONADO CON LA CONSTANCIA DEL MÓDULO DE $\vec{L}$ $\Rightarrow dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta$

$$L = mrv = mr^2\omega = mr^2\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{L}{m} = cte} \;!!$$

3-

a)



La velocidad de escape es la velocidad necesaria para que el objeto abandone el campo gravitatorio lunar. La energía mecánica en el infinito es nula:

$$E_m = E_c + E_p = 0$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}V_e^2 - \frac{GM_L\cancel{m}}{R_L} = 0 \Rightarrow \boxed{V_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}}$$

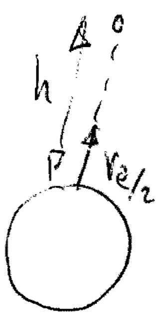
Por otro lado la energía mecánica se mantiene constante (en este caso es nula $E_m=0$) ⇒ en todo el trayecto (campo conservativo); así que la posición a la que se encuentra cuando lleva una veloc. $V_0/2$:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\left(\frac{V_0}{2}\right)^2 - \frac{GM_L\cancel{m}}{r} = 0 \qquad \text{con } V_0 = V_e$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}}{2}\right)^{\cancel{2}} - \frac{GM_L}{r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{8}\,4}\frac{\cancel{2}\cancel{GM_L}}{R_L} - \frac{\cancel{GM_L}}{r} = 0$$

Para reducir su veloc. a la mitad debe estar a cuatro radios lunares del centro. $\boxed{r = 4R_L}$

b) $V_0 = \frac{V_e}{2}$



En este caso la velocidad es menor a la de escape; pero la energía mecánica se conserva.

$$E_{m_0} = E_{m_f}$$ (en la altura máxima la velocidad es nula)

$r = R_L + h$

$\boxed{h = r - R_L}$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_Lm}{R_L} = -\frac{GM_Lm}{r}$$

$$\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}\Big/2\right)^2 - \frac{GM_Lm}{R_L} = -\frac{GM_Lm}{r}$$

$$\frac{1}{\cancel{8}\,4}\frac{\cancel{2}\cancel{GM_Lm}}{R_L} - \frac{\cancel{GM_Lm}}{R_L} = -\frac{\cancel{GM_Lm}}{r} \Rightarrow$$

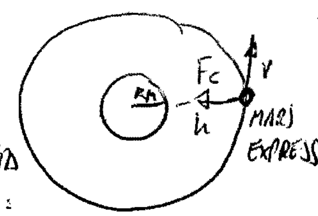
$$-\frac{3}{4}\frac{1}{R_L} = -\frac{1}{r}$$

$$r = \frac{4}{3}R_L$$

$$\boxed{h = \frac{4}{3}R_L - R_L = \frac{R_L}{3}}$$

4-

a)



La fuerza centrípeta de giro es la gravedad:

$T = 7{,}5\ h = 2{,}7 \cdot 10^4\ s$

$m = 120\ kg$

EXPRESS $V = 2{,}15\ km/s = 2150\ m/s$

Al ser una órbita circular:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \;;\; v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Sustituyendo

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3}$$ 3ª ley Kepler

$$F_c = F_g$$

$$\frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{r}} = \frac{GM\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}$$

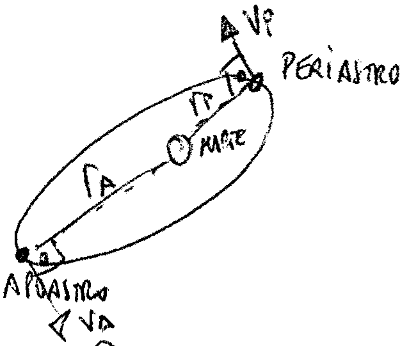
$$\boxed{v = \sqrt{GM/r}}$$

Despejamos la masa de Marte; pero eliminando r:

$$\boxed{r = \frac{GM}{v^2}} \rightarrow T = \frac{2\pi \frac{GM}{v^2}}{v} = 2\pi \frac{GM}{v^3}$$

$$M_M = \frac{v^3 \cdot T}{2\pi G} = \frac{2150^3 \cdot 2{,}7 \cdot 10^4}{2\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} = \boxed{6{,}4 \cdot 10^{23}\ kg}$$

b)



$h_p = 258\ km \Rightarrow r_p = R_M + h_p = 3648\ km$

$h_A = 11560\ km \Rightarrow r_A = R_M + h_A = 14950\ km$

$R_M = 3390\ km$

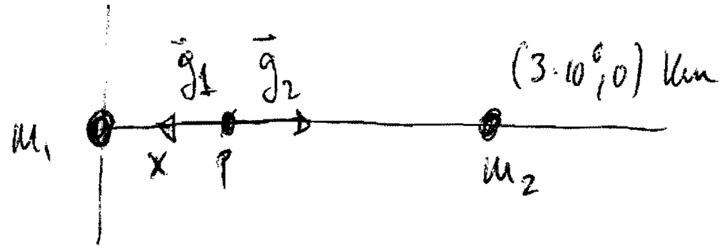
Según hemos demostrado en la cuestión 2, el momento angular se debe mantener constante: $L_A = L_p$

$$\cancel{m}\, r_A v_A \cancel{\operatorname{sen} 90^\circ}^{\,1} = \cancel{m}\, r_p v_p \cancel{\operatorname{sen} 90^\circ}^{\,1}$$

$$\frac{V_p}{V_A} = \frac{r_A}{r_p} = \frac{14950}{3648} = \underline{4{,}1}$$

La velocidad en el periastro es unas cuatro veces mayor que en el apoastro.

5-



$m_1 = 2\cdot10^{30}$ kg
$m_2 = 3\cdot10^{30}$ kg

a) $$\boxed{\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \vec{0} \qquad \vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\,\hat{u}_r} \Rightarrow \boxed{\vec{g}_1 = -\vec{g}_2}$$

El punto debe estar situado entre la m_1 y m_2 y más próxima a m_1.

$$\boxed{g_1 = g_2} \Rightarrow \frac{\cancel{G} m_1}{x^2} = \frac{\cancel{G} m_2}{(d-x)^2}$$

$$m_1 (d-x)^2 = m_2 x^2$$

$$2\cdot\cancel{10^{30}}(3\cdot10^6 - x)^2 = 3\cdot\cancel{10^{30}}\cdot x^2$$

$$9\cdot10^{12} - 1{,}2\cdot10^7 x + 2x^2 = 3x^2 \Rightarrow x^2 + 1{,}2\cdot10^7 x - 9\cdot10^{12} = 0$$

El punto es $\boxed{P = (1'3\cdot10^6, 0)\ \text{km}}$ $\boxed{x = 1{,}3\cdot10^6\ \text{km}}$

b) $m = 500$ kg El trabajo $\boxed{W_{AB} = m\,(V_A - V_B)}$

En este caso $V_\infty = 0$ $$W_{P\infty} = m\,(V_P - 0) = m V_P = \boxed{-1{,}11\cdot10^{14}\ \text{J}}$$

$$\boxed{V = -\frac{GM}{r}}$$

$W_{P\infty} < 0$ Se necesita el trabajo de una fuerza externa.

$$V_P = V_{1P} + V_{2P} = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{30}}{1{,}3\cdot10^9} - \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot3\cdot10^{30}}{1{,}7\cdot10^9} = -1{,}03\cdot10^{11} - 1{,}18\cdot10^{11}$$

$$V_P = -2{,}21\cdot10^{11}\ \text{J/kg}$$